

# Nichtgravitative Kräfte bei Kometen

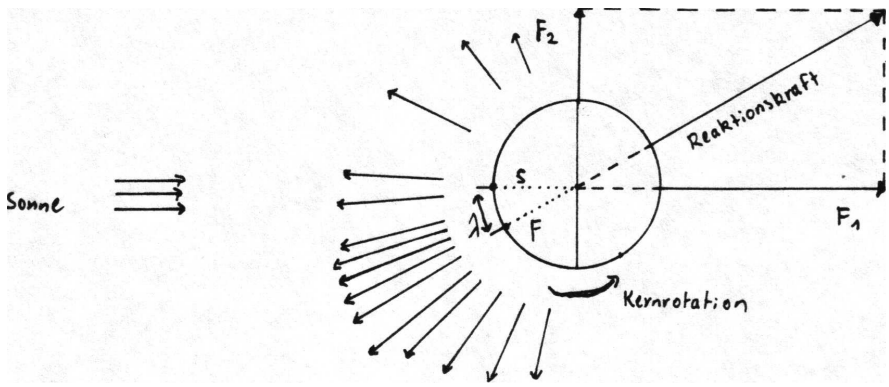
Von Mike Kretlow, T1T – Michael Adrian Observatorium

## Zusammenfassung

In vielen Fällen läßt sich die Bewegung eines periodischen Kometen in unserem Sonnensystem nicht allein durch das Gravitationsgesetz beschreiben. Es treten zusätzliche Beschleunigungen auf, die im wesentlichen zu einer Ab- oder Zunahme der Umlaufzeit führen und in präzisen Ephemeriden berücksichtigt werden müssen, insbesondere wenn es um die Wiederentdeckung eines periodischen Kometen oder gar um die Planung einer Raummission geht. Diese nichtgravitativen Kräfte werden als Folge von Sublimationseffekten an der Oberfläche eines Whippleschen Kometenkernes interpretiert. Vor rund 30 Jahren publizierte Brian G. Marsden ein Modell zur praktischen Behandlung dieser nichtgravitativen Kräfte, das auch heute noch als Standard dient.

## Einführung und Historisches

Erste Hinweise darauf, daß die Bewegung der Kometen nicht allein durch die Newtonschen Bewegungsgleichungen bestimmt ist, ergaben sich zu Beginn des 19. Jahrhunderts. Bei der Untersuchung des nach ihm benannten Kometen fand J. Encke (1820), daß dessen Umlaufzeit von etwa 3.3 Jahren um rund 0.1 Tage pro Umlauf abnahm. Er versuchte dies durch ein Medium zu erklären, in dem der Komet infolge der Abbremsung einen Energieverlust erleidet und es so zu der Verkürzung der Umlaufzeit kommt. Später fand er aber auch noch eine Änderung der Orientierung der Bahnebene, was nicht durch ein solches bremsendes Medium erklärt werden kann. Im Jahre 1835 erschien der Halleysche Komet mit einer Verspätung von mehreren Tagen gegenüber den Vorausberechnungen. Diese Diskrepanz konnte nicht durch Unsicherheiten in den Rechnungen erklärt werden und stand somit im Gegensatz zu der beim Enckeschen Kometen beobachteten Abnahme der Umlaufzeit. F. W. Bessel beobachtete den Halleyschen Kometen und wies auf die ausgeprägten Ausströmungserscheinungen hin, die sich im Teleskop erkennen ließen (derartige dynamische Strukturen konnten im März 1996 am Kometen C/1996B<sub>2</sub> Hyakutake selbst mit kleinen Ferngläsern verfolgt werden). Dies und die Tatsache, daß die Bewegung der großen Planeten offensichtlich unbeeinflusst ist von dem von Encke postulierten Äther, führte ihn zu der Ansicht, daß diese zusätzlichen Kräfte durch Materieabströmungen am Kometen verursacht werden, was er auch quantitativ formulierte (Bessel 1835, 1836). In den folgenden Jahrzehnten wurden die Bahnen weiterer periodischer Kometen untersucht. Doch nicht immer erhielt man signifikante Ergebnisse bezüglich einer Beschleunigung oder Abbremsung des Kometen, weil die Effekte gegenüber den Planetenstörungen i.a. klein sind, und die Unsicherheit der Berechnungsgrundlagen (Planetenmassen, Positionsgenauigkeiten) teilweise noch zu groß war. Es muß auch bedacht werden, daß der Arbeitsaufwand für die genaue Bahnberechnung eines Kometen unter Be-



**Abb. 1** Nichtgravitative Kräfte an einem rotierenden Kometenkern. Der Sublimationsschwerpunkt  $F$  ist gegenüber dem subsolaren Punkt  $S$  um den lag angle  $\lambda$  versetzt. Ein-gezeichnet ist die radiale ( $F_1$ ) und die transversale ( $F_2$ ) Komponente der Kraft. Der Normalenvektor  $\mathbf{e}_3$  steht senkrecht zur Papierebene.

rücksichtigung der Planetenstörungen enorm war, da ja „zu Fuß“ gerechnet werden musste.

## Das Standardmodell

1950 und 1951 veröffentlichte F. Whipple sein Kometenmodell des „schmutzigen Schneeballs“. Wesentliche Motivation für dieses Modell waren die nichtgravitativen Beschleunigungen, die bei vielen aktiven periodischen Kometen auftraten. Bis zu diesem Zeitpunkt wurde teilweise noch die Auffassung eines „Sandbankmodells“ vertreten, insbesondere weil es Kometen als Quelle periodischer Meteorströme gut erklären konnte, an der physikalischen Interpretation der nichtgravitativen Kräfte aber scheitert. Nach Whipple's Modell ist der Kometenkern ein fester Körper, der hauptsächlich aus gefrorenem Wassereis (und ggf. anderen gefrorenen Gasen wie z. B. Kohlendioxid) und darin eingelagertem Staub besteht. Bei der Erwärmung des Kernes kommt es zur Sublimation der Gase, die dann nach außen abströmen. Die Rotation des Kometenkerns und seine thermische Trägheit bewirken, daß der Schwerpunkt der Sublimation um den sogenannten *lag angle*  $\lambda$  gegenüber dem subsolaren Punkt in Rotationsrichtung versetzt ist (Abb. 1). Dieser „Raketeneffekt“ verursacht eine nichtgravitative Reaktionskraft  $\mathbf{F}$ , deren Tangentialkomponente  $F_2$  je nach Rotationsrichtung der Bahnbewegung entgegengesetzt oder gleichgerichtet ist und somit zu einer Abnahme oder Zunahme der Umlaufzeit führt. Der lag angle ist meistens klein (typischerweise  $5^\circ - 10^\circ$ ), daher ist die Radialkomponente  $F_1$  betragsmäßig oft um eine Größenordnung größer als  $F_2$ . Wenn die Rotationsachse gegen die Bahnebene des Kometen gekippt ist, ergibt sich zusätzlich eine Normalkomponente  $F_3$ .

Marsden führte (1968) eine umfangreiche Untersuchung von 18 kurzperiodischen Kometen durch und stellte dabei fest, daß 15 von ihnen signifikanten nichtgravitativen Kräften unterliegen. Sieben Kometen zeigten sekuläre Beschleunigungen, acht

wurden sekulär abgebremst. Im zweiten Teil dieser Arbeit stellte Marsden (1969) ein semi-empirisches Modell vor, das die Bewegungsgleichungen durch drei nichtgravitative Beschleunigungskomponenten ergänzt, deren Orientierung  $\mathbf{F}_i = F_i \mathbf{e}_i$  in einem am Kometen mitgeführten Koordinatensystem ( $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ) folgendermaßen festgelegt ist:  $\mathbf{e}_1$  zeigt entlang des Radiusvektors  $\mathbf{r}$  nach außen,  $\mathbf{e}_2$  steht senkrecht dazu in Bewegungsrichtung und  $\mathbf{e}_3$  steht senkrecht auf beiden und zeigt zum Nordpol der Bahnebene. Da die Erwärmung des Kometenkerns mit abnehmender Sonnendistanz ansteigt nahm Marsden an, daß die nichtgravitativen Kräfte kontinuierlich und in Abhängigkeit der heliozentrischen Distanz  $r$  (und evtl. der Zeit) wirken:

$$F_i = A_i f(r) e^{-B_i \tau} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (1)$$

mit den konstanten *nichtgravitativen Parametern*  $A_1, A_2, A_3$  und  $B_1, B_2, B_3$  sowie der seit der Oskulationsepoche vergangenen Zeit  $\tau$ . Die Funktion  $f(r)$  wurde aus intuitiven und teilweise empirischen Gründen in der folgenden Form angesetzt:

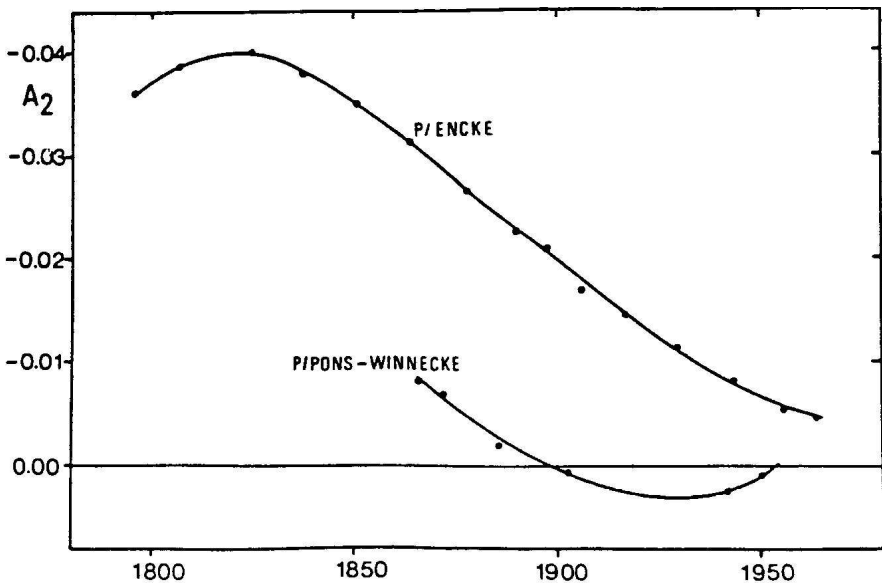
$$f(r) = e^{-r^2/C} r^{-\alpha}. \quad (2)$$

Die Werte von  $C$  und  $\alpha$  wurden empirisch bestimmt. Für  $C = 2$  und  $\alpha = 3$  erhielt man die beste Darstellung der Beobachtungen. Die Zeitabhängigkeit wurde eingeführt, weil man beispielsweise beim Enckeschen Kometen festgestellt hat, daß die bei ihm wirkende Transversalbeschleunigung mit der Zeit abnahm (Abb. 2). Nachdem Marsden (1970) erkannte, daß die transversale Komponente des Kometen P/Pons-Winnecke das Vorzeichen wechselte (Abb. 2) und man auch Fälle erraticen Verhaltens von  $B_2$  fand (Marsden & Sekanina 1971), wurde auf die Berechnung der  $B_i$  fortan (in den meisten Fällen) verzichtet. Vermutlich spielen konkrete Ausströmungsprozesse, Helligkeitsausbrüche usw. eine Rolle bei diesen Anomalien. Es ist daher üblich, so viele Erscheinungen eines Kometen zusammenzufassen, daß einerseits die Parameter  $A_i$  sicher bestimmt werden können (i.a. sind dafür drei Erscheinungen erforderlich), andererseits keine systematischen Restfehler in den Beobachtungen zurückbleiben, die auf eine signifikante Änderung der nichtgravitativen Parameter innerhalb des betrachteten Zeitraums hindeuten.

In einer späteren Arbeit (Marsden 1973) wurde eine neue Funktion  $g(r)$  für den Verlauf der Kräfte angesetzt und wird seither verwendet:

$$g(r) = \alpha \left( \frac{r}{r_0} \right)^{-m} \left[ 1 + \left( \frac{r}{r_0} \right)^n \right]^{-k}, \quad (3)$$

mit  $m = 2.15$ ,  $n = 5.093$ ,  $k = 4.6142$ , der Normalisierungskonstanten  $\alpha = 0.111262$  (damit gilt  $g(1) = 1$ ) und  $r_0 = 2.808$  AE. Die Form der Funktion wurde von Sekanina vorgeschlagen und ist von Delsemme an Labormessungen der Wassereis-Sublimationsrate in Abhängigkeit der Bestrahlung angepaßt worden.  $r_0$  definiert die kritische Distanz, ab der die Sonnenerwärmung zur Sublimation des Wassereises führt. Für  $\text{CO}_2$  z. B. erhält man  $r_0 \approx 6$  AE. Die Bestimmung von  $r_0$  als zusätzliche Unbekannte bei der Berechnung verschiedener Kometen lieferte Werte zwischen 1 AE



**Abb. 2** Änderung des transversalen Parameters  $A_2$  in Abhängigkeit von der Zeit für die beiden Kometen P/Encke und P/Pons-Winnecke. Aus Rahe (1977).

und 4 AE, was die allgemeine Auffassung eines hauptsächlich aus Wassereis bestehen Kometen stützt (Marsden 1984). Für  $r \ll r_0$  gilt  $g(r) \sim r^{-m} \approx 1/r^2$ , d.h. die Sonneneinstrahlung wird i. w. für die Verdampfung des Wassereises genutzt, da die kritische Distanz umgekehrt proportional zur Verdampfungswärme des Wassers  $r_0 \sim Q_v^{-2}$  ist (Marsden et al. 1973). Bei größeren heliozentrischen Distanzen wird das meiste der absorbierten Sonnenstrahlung wieder abgestrahlt. Der Verlauf der Funktionen  $f(r)$  und  $g(r)$  ist in Abb. 3 dargestellt.

Zur Unterscheidung spezifiziert man die Verwendung der Funktion  $f(r)$  mit Stil I (nicht mehr im Gebrauch) bzw.  $g(r)$  mit Stil II, letzteres wird auch als „Standardmodell“ bezeichnet.

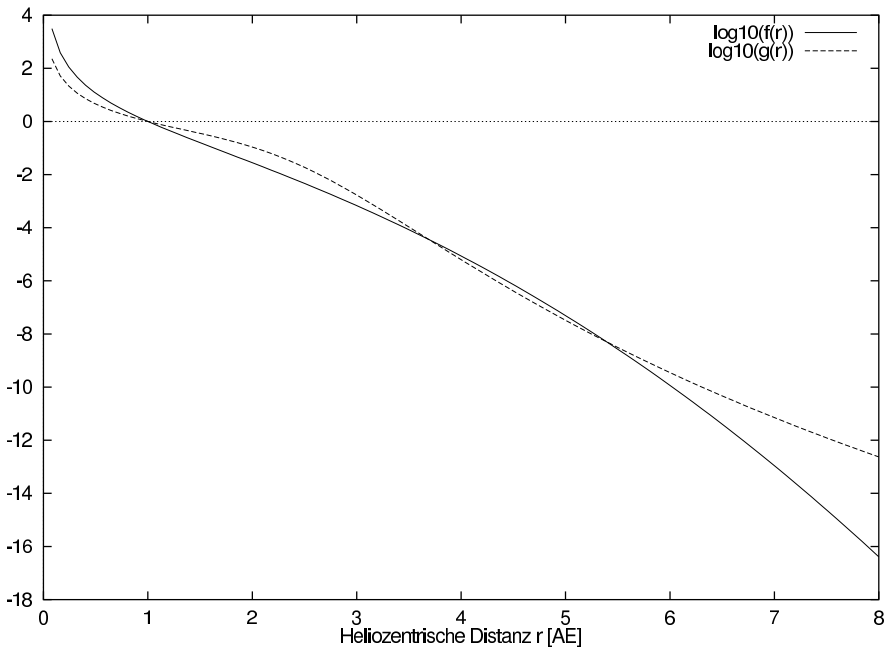
Damit erhält man folgende (klassische) Bewegungsgleichungen für einen Kometen nach dem Standardmodell:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -k^2 \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \text{grad } R + A_1 g(r) \mathbf{e}_1 + A_2 g(r) \mathbf{e}_2 + A_3 g(r) \mathbf{e}_3, \quad (4)$$

mit dem begleitenden Dreibein

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{r\dot{\mathbf{r}} - \dot{r}\mathbf{r}}{h}, \quad \mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{h}}{h}, \quad (\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}). \quad (5)$$

$R$  ist die Störfunktion der Planeten,  $k$  die Gaußsche Konstante ( $k = 0.01720209895$ ). Die zunächst unbekannt Parameter  $A_i$  können während der Bahnverbesserung (zusammen mit den sechs Keplerschen Elementen) mit einem Least-Squares-Fit an die Beobachtungen berechnet werden.



**Abb. 3** Logarithmus der Funktionen  $f(r)$  und  $g(r)$  in Abhängigkeit der heliozentrischen Distanz.  $f(r) = \beta e^{-r^2/2} r^{-3}$  wurde mit dem Faktor  $\beta = 1.64872$  normalisiert, so daß  $f(1) = 1$  gilt.

Nur in Ausnahmefällen (z. B. P/Grigg-Skjellerup, P/Metcalf-Brewington, P/Kopff oder P/Clark) ist es möglich, aussagekräftige Werte für  $A_3$  zu ermitteln, da die Normalkomponente der nichtgravitativen Beschleunigung zu periodischen Störungen in der Bahnneigung  $i$  und in der Länge des aufsteigenden Knotens  $\Omega$  führt. Bei der Integration über drei oder mehr Umläufe mittelt sich dieser Effekt in der Regel heraus.

In Abbildung 4 sind Kometen mit kaum zeitabhängigem  $A_2$  solchen mit einer stark zeitabhängigen transversalen Komponente gegenüber gestellt.

## Alternativmodelle

Aus der Ableitung der Bahnhalbachse nach der Zeit

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}} \left[ (e \sin v) F_1 + \frac{p}{r} F_2 \right], \quad (6)$$

ist ersichtlich, daß die Änderung der Umlaufzeit von der sekulären Wirkung der transversalen Komponente herrührt. Hierbei bezeichnet  $n$  die mittlere tägliche Bewegung,  $e$  die Bahnexzentrizität,  $v$  die wahre Anomalie und  $p$  den Bahnparameter. Geht man – wie im Standardmodell – von symmetrisch zum Perihel auftretenden nichtgravitativen Beschleunigungen aus, so nimmt die Bahnhalbachse für  $F_2 > 0$  (d.h. prograde

Rotation des Kernes) mit der Zeit zu, für  $F_2 < 0$  (retrograde Rotation) nimmt sie im Zeitmittel hingegen ab.

Motiviert durch die offensichtlich asymmetrischen Lichtkurven einiger Kometen (z. B. P/d'Arrest 1982 oder P/Halley 1986) ließen Yeomans & Chodas (1989) in ihrem erweiterten Standardmodell auch asymmetrisch um das Perihel wirkende nichtgravitative Beschleunigungen zu. Anstatt der Funktion  $g(r)$  wertet man hierfür zu jedem Zeitpunkt  $t$  die Funktion  $g(r')$  mit  $r' = r(t') = r(t - DT)$  aus. Der time shift  $DT$  gibt an, um wie viele Tage vor ( $DT < 0$ ) oder nach ( $DT > 0$ ) dem Periheldurchgang  $T$  die Abströmungsrate ihr Maximum erreicht. Wünschenswert wäre es,  $DT$  unabhängig aus visuellen Lichtkurven bestimmt werden könnte, anstatt diesen Parameter als zusätzliche Unbekannte in der Rechnung mitzuführen. Die Helligkeit eines Kometen stellt ein direkt beobachtbares Maß für die Aktivität des Kometen dar. Dabei setzt man aber zwangsläufig voraus, daß das Maximum der Wasserdampfproduktion mit dem Maximum der Lichtkurve zusammenfällt. Das muß nicht notwendigerweise so sein, denn die visuellen Helligkeiten korrelieren nicht allein mit der Gasproduktion, sondern sind an das Staub-zu-Gas-Verhältnis gekoppelt (siehe z. B. Svoreň 1989). Yeomans und Chodas berechneten die Bahnen verschiedener Kometen, indem sie  $DT$  als Eingabeparameter variierten und als besten Wert von  $DT$  jene Bahn mit dem kleinsten mittleren Fehler der Beobachtungen auswählten. Anschließend wurden die visuellen Lichtkurven der Kometen auf Asymmetrien untersucht. In den meisten Fällen konnte der Wert von  $DT$  bestätigt werden. Speziell für 1P/Halley erreicht sowohl die Lichtkurve der 1986er Erscheinung als auch die direkt gemessene  $H_2O$ -Freisetzungsrates ihr Maximum 20 Tage nach dem Perihel, was im Einklang mit der Bahnanalyse der Autoren steht. In einigen wenigen Fällen fand man aber keine oder eine nur geringe Korrelation. Problematisch bei der Verwendung von visuellen Lichtkurven als Indikator für eine Aktivitätsasymmetrie ist die Ungenauigkeit, mit der die visuellen Schätzungen oftmals behaftet sind.

Die mit dem asymmetrischen Modell berechneten Werte für  $A_1, A_2$  weichen z.T. erheblich von jenen für das symmetrische Modell ab (für  $DT = 0$  sind beide natürlich identisch). Ursache dafür ist, daß sekuläre Änderungen in der Bahnenergie im symmetrischen Modell hauptsächlich durch die transversale, im asymmetrischen Modell hingegen i. w. durch die radiale Komponente verursacht werden. Damit erhält man auch einen anderen (i.a. kleineren) thermischen lag angle  $\lambda \approx \arctan(A_2/A_1)$ . Ein Vergleich der Parameter ist auch deshalb nicht mehr möglich, weil diese im asymmetrischen Modell nicht mehr auf  $r = 1$  AE sondern auf  $r' = 1$  AE normiert sind.

Rickman & Froeschlé (1982, 1986) und Froeschlé & Rickman (1986) entwickelten ein thermisches Modell eines Kometenkerns und haben dieses Modell für Untersuchungen über Größe und Verlauf nichtgravitativer Kräfte in Abhängigkeit der heliozentrischen Distanz  $r$  und der Modellparameter eingesetzt. Dieses Modell führt zu einem deutlich anderen Verhalten der nichtgravitativen Kräfte im Vergleich zum symmetrischen Standardmodell. Alle drei Komponenten zeigen unterschiedliche Abhängigkeiten von der heliozentrischen Distanz, die nicht von der Form  $g(r)$  sind. Darüberhinaus können  $A_1$  und  $A_2$  – in Abhängigkeit der angesetzten thermischen Trägheit des Kernes – um einen Faktor von 100 im Bereich  $0.6 < r < 4.0$  AE variieren!

Sowohl Rickman & Froeschlé als auch Landgraf (1986, 1988) haben das Modell auf 1P/Halley angewandt. Trotz allem lieferte das Modell keine besseren Bahnlösungen (gemessen am mittleren Fehler einer Beobachtung) als jene, die mit dem Standardmodell berechnet wurden.

Sekanina hat die Auswirkung diskreter Aktivitätszentren auf die Bewegung eines periodischen Kometen untersucht (Sekanina 1993). In seinem Modell hängen die nichtgravitativen Beschleunigungen von der Orientierung der Rotationsachse und der Lokalisierung der aktiven Gebiete auf der Kometenoberfläche ab. Die Zeitabhängigkeit nichtgravitativer Parameter, eine Aktivitätsasymmetrie in Bezug auf das Perihel oder ein erratisches Verhalten ließe sich durch die Aktivierung neuer Gebiete oder durch das Erlöschen vorhandener erklären. Eine Änderung der Spinachse rief ebenfalls zeitabhängige oder erratische Verläufe der nichtgravitativen Parameter hervor.

Sitarski führte in seinen Arbeiten (1992) ein Modell ein, das neben einem einzigen nichtgravitativen Parameter  $A$ , den Lag angle  $\lambda$ , die Neigung  $I$  des Kometenkernäquators gegen die Bahnebene und die kometozentrische Länge  $\Phi$  der Sonne im Perihel als unbekannte Parameter verwendet. Die von ihm gefundenen Lösungen sind jenen des Standardmodells ( $A_1, A_2, A_3$ ) sehr ähnlich.

Derzeit liefert Marsdens Standardmodell trotz der Schwächen in Bezug auf seine physikalische Interpretation eine praktikable Grundlage für die empirische Behandlung nichtgravitativer Kräfte bei periodischen Kometen. Modelle mit einer stärkeren physikalischen Kopplung führen mehr Unbekannte in die Rechnung ein und erfordern i.a. eine Integration über mehr Erscheinungen als es beim Standardmodell der Fall ist. Teilweise liefern sie aber mehrdeutige Lösungen und die erhaltenen Resultate sind (gemessen am mittleren Fehler) meistens nicht besser als jene des Standardmodells, was ja zumindest eine indirekte Bestätigung dieser Modelle bedeuten würde.

Nicht zuletzt deshalb ist eine Raummission zu einem Kometen und dessen längerfristige Beobachtung vor Ort von großem Interesse für die Entwicklung geeigneter Modelle zur Behandlung nichtgravitativer Kräfte.

## Differentielle Bahnverbesserung

Für die Berechnungen müssen die Bewegungsgleichungen numerisch integriert werden, um exakte Positionen des Kometen zu erhalten (gestörte Ephemeride). Aus dem Vergleich der berechneten Positionen mit den astrometrischen Beobachtungen können mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate verbesserte Bahnelemente (und zusätzliche Unbekannte wie nichtgravitative Parameter) ermittelt werden. Es existieren verschiedene Verfahren, die sich für die Bahnberechnung in einem sogenannten n-body-Programm einsetzen lassen. Man unterscheidet im wesentlichen zwischen Einschnitt- und Mehrschrittverfahren. Die Anwendung von Einschnittverfahren in der Bahnverbesserung hat Federspiel (1994) vorgestellt, ein vom Autor verwendetes (Prädiktor-Korrektor) Mehrschrittverfahren ist bei Shampine & Gordon (1984) beschrieben, eine PASCAL-Implementierung des Programms haben Montenbruck & Pflieger (1994) veröffentlicht. Erwähnt werden sollten auch die von Schubart & Stumpff (1966) sowie

von Everhart (1974, 1984) vorgestellten Integratoren.

Stehen uns  $N$  Beobachtungen zur Verfügung, so können wir für jede Beobachtung  $i$  zwei Bedingungsgleichungen der Form

$$\cos \delta_i \Delta \alpha_i = \cos \delta_i \sum_{j=1}^{6+3} \frac{\partial \alpha_i}{\partial E_j} \Delta E_j \quad \text{und} \quad \Delta \delta_i = \sum_{j=1}^{6+3} \frac{\partial \delta_i}{\partial E_j} \Delta E_j, \quad (i = 1, \dots, N) \quad (7)$$

aufschreiben. Dabei stehen  $(E_1 \dots E_6)$  für die sechs zu verbessernden Bahnelemente (etwa  $T, q, e, \omega, \Omega, i$ ) und  $(E_7, E_8, E_9)$  für die drei Parameter  $(A_1, A_2, A_3)$ . Die obere Summationsgrenze  $6+3$  soll andeuten, daß neben den sechs zu verbessernden Bahnelementen (oder alternativ je drei kartesische Orts- und Geschwindigkeitskomponenten) bis zu drei nichtgravitative Parameter berücksichtigt werden – in der Regel werden es aber zwei sein.  $\Delta \alpha_i$  und  $\Delta \delta_i$  sind die Restfehler im Sinne (Beobachtung–Rechnung), die wir aus dem Vergleich der berechneten mit der astrometrischen Position für die Beobachtungszeit  $t_i$  erhalten.

Insgesamt haben wir also (für  $2N > 6 + 3$ ) ein überbestimmtes Gleichungssystem für die Berechnung der gesuchten Unbekannten  $\Delta E_j$  (also den Korrekturen der Bahnelemente bzw. Parameter), daß beispielsweise mit der Gaußschen Methode der kleinsten Quadrate gelöst werden kann.

Die Differentialquotienten können analytisch berechnet (ältere Literatur) oder durch ihre Differenzenquotienten

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial E_j} \approx \frac{\alpha_i(E_1, \dots, E_j + \epsilon, \dots, E_{6+3}) - \alpha_i(E_1, \dots, E_j, \dots, E_{6+3})}{\epsilon} \quad (8)$$

$$\frac{\partial \delta_i}{\partial E_j} \approx \frac{\delta_i(E_1, \dots, E_j + \epsilon, \dots, E_{6+3}) - \delta_i(E_1, \dots, E_j, \dots, E_{6+3})}{\epsilon} \quad (9)$$

approximiert werden.  $\alpha_i(E_1, \dots, E_{6+3})$  bezeichnet die mit den Elementen  $E_1, \dots, E_{6+3}$  berechnete Rektaszension des Kometen zur Beobachtungszeit  $t_i$ , respektives gilt für die Deklination. Die Variation  $\epsilon$  beträgt im allgemeinen einige Prozent des Wertes von  $E_j$ . Dieses Vorgehen ist sehr instruktiv und leicht zu programmieren, weist aber auch diverse (z. B. numerische) Nachteile auf.

Sitarski (1971, 1984) und Landgraf (1983) haben ein Verfahren vorgestellt, daß die Planetenstörungen in den Differentialquotienten berücksichtigt und daher in vielen Situationen zuverlässiger arbeitet. Dabei wird ein Differentialgleichungssystem aufgestellt, daß die zeitliche Fortpflanzung eines Fehlers in den Anfangswerten (welche durch die zu verbessernden Bahnelemente zu einer gegebenen Oskulationsepoche definiert sind) des Kometen beschreibt und zusammen mit den Bewegungsgleichungen integriert wird. Die Implementierung dieses Verfahrens ist jedoch erheblich komplizierter als das erstgenannte, es sei daher auf die Originalwerke verwiesen. In dem vom Autor entwickelten Programm ist das Verfahren von Sitarski implementiert.



# Eigene Rechnungen

Am Beispiel des Kometen 46P/Wirtanen soll die Anwendung des Standardmodells beschrieben und die erhaltenen Resultate diskutiert werden. Obwohl die visuellen Lichtkurven der letzten drei Erscheinungen (1986, 1991 und 1997) ein  $\Delta T > 0$  von etwa 1–2 Wochen andeuten, konnten entsprechende Rechnungen mit dem asymmetrischen Modell keine Bestätigung liefern. Alle weiteren Ausführungen beziehen sich also auf das symmetrische Standardmodell.

Komet Wirtanen ist von besonderem Interesse, weil er das Ziel der europäischen Rosetta-Mission ist. Der Start der Raumsonde ist für 2003 vorgesehen, das Rendezvous mit dem Kometen für 2011 geplant.

Zu Beginn der Rechnungen lagen insgesamt 348 Beobachtungen aus acht Erscheinungen im Zeitraum 1948–1997 vor. Darin enthalten sind 41 eigene CCD-Beobachtungen, die der Autor zwischen März und Juni 1997 an der Sternwarte Siegen mit einem 30 cm-Newton (f/4.8) erhalten hat. In zahlreichen Vorrechnungen wurden grob fehlerhafte Beobachtungen aussortiert und mäßig gute Beobachtungen abgewichtet.

Abbildung 5 zeigt die verbleibenden Restfehler der Bahnverbesserung für den Zeitraum 1985–1997, wenn man nichtgravitative Kräfte außer Acht läßt (obere Graphik) bzw. diese berücksichtigt (untere Graphik). Bei der klassischen Lösung liegt der mittlere Fehler in einer Koordinaten (RMS) bei 15.6 Bogensekunden, also deutlich über der durchschnittlichen Genauigkeit einer Beobachtung. Die Bahn repräsentiert die drei Erscheinungen nur unbefriedigend. Führt man bei der Bahnverbesserung noch die zwei Parameter  $A_1, A_2$  als Unbekannte ein, dann erhält man eine wesentlich bessere Lösung (Tab. 1), wie man anhand der verbleibenden Restfehler ersehen kann. Der RMS-Fehler geht auf 0.58 Bogensekunden zurück. Eine Lösung nach allen drei nichtgravitativen Parametern liefert keine bessere Bahn (gemessen am RMS-Fehler),  $A_3$  ist auch nur sehr unsicher determiniert ( $A_3 = -0.017 \pm 0.011$ ).

Von der Auswirkung der nichtgravitativen Kräfte auf die Bahnelemente ist gerade für die Wiederentdeckung eines periodischen Kometen die Änderung der Umlaufzeit von Interesse. Die durch  $A_2$  (in Einheiten von  $10^{-8}$ AE/Tag<sup>2</sup> ausgedrückt) über einen vollständigen Bahnlauf verursachte Korrektur der Perihelzeit (in Tagen) beträgt

$$\Delta T = 0.074 a^{2.5} A_2 \int_0^\pi g(r) r dv, \quad (10)$$

mit der Bahnhalbachse  $a$  und der wahren Anomalie  $v$  als Integrationsvariable (Sekulina 1993). Für Komet Wirtanen ( $A_2 = -0.174$ ) bedeutet dies eine Korrektur von etwa  $-0.5$  Tagen.

## Literatur

- [1] Bessel F. W.: Schreiben des Herrn Geheimenraths und Ritters Bessel an den Herausgeber. Astron. Nachr. 13(1835)3.
- [2] Bessel F. W.: Bemerkungen über Mögliche Unzulänglichkeit der die Anziehungen Allein

**Tab. 1** Bahnlösung für 46P/Wirtanen zur Epoche 1997-März-13.0 TT. Die Bahn wurde aus 309 Beobachtungen (232 Rektaszensionen und 279 Deklinationen) berechnet. Die nichtgravitativen Parameter  $A_1, A_2$  (Marsden Stil II) sind in Einheiten von  $10^{-8}$ AE/Tag<sup>2</sup> angegeben. Bei der Rechnung wurden die Störungen aller großen Planeten (Massen und Positionen aus der JPL DE403-Ephemeride) und der Planetoiden Ceres, Pallas und Vesta sowie relativistische Effekte in der Standardmetrik von Schwarzschild berücksichtigt. Die Elemente beziehen sich auf das FK5/J2000-System. Der mittlere Fehler (RMS) dieser Bahnlösung liegt bei 0.58 Bogensekunden.

T	=	19970314.15009	±	0.000086			
q	=	1.0637628	±	0.00000048	$\omega$	=	356.341603 ± 0.000133
a	=	3.0990998	±	0.00000949	$\Omega$	=	82.205941 ± 0.000109
n	=	0.1806553	±	0.00000083	i	=	11.722529 ± 0.000015
e	=	0.6567510	±	0.00000104	P	=	5.455736 ± 0.000025
$A_1$	=	0.19838	±	0.03948			
$A_2$	=	-0.17427	±	0.00079			

Berücksichtigenden Theorie der Kometen. *Astron. Nachr.* 13(1836)345.

- [3] Encke J.: *Berliner Astronomisches Jahrbuch für 1823*. Berlin 1920.
- [4] Everhart E.: *Implicit Single-Sequence Methods for Integrating Orbits*. *Celestial Mechanics* 10(1974)35.
- [5] Everhart E.: *An efficient integrator that uses Gauss-Radau spacings*. In: *Dynamics of Comets: Their Origin and Evolution*. (Eds. A.Carusi & G.B.Valsecchi). Reidel Publishing 1984.
- [6] Federspiel M.: *Störungsrechnung und Bahnverbesserung*. *SuW* 6(1994)482.
- [7] Froeschlé C. & Rickman H.: *Model calculations of nongravitational forces on short-period comets I. Low-obliquity case*. *Astron. Astrophys.* 170(1986)145.
- [8] Landgraf W.: *Ein Verfahren zur Bestimmung der nichtgravitativen Parameter und seine Anwendung auf Komet 1930 VI Schwaßmann-Wachmann 3*. *Die Sterne* 3(1983)153-163.
- [9] Landgraf W.: *On the motion of comet Halley*. *Astron. Astrophys.* 163(1986)246.
- [10] Landgraf W.: *Nichtgravitative Kräfte beim Halleyschen Kometen*. Dissertation Georg-August-Universität Göttingen 1988.
- [11] Marsden B. G.: *Comets and Nongravitational Forces*. *AJ* 73(1968)367.
- [12] Marsden B. G.: *Comets and Nongravitational Forces II*. *AJ* 74(1969)720.
- [13] Marsden B. G.: *Comets and Nongravitational Forces III*. *AJ* 75(1970)75.
- [14] Marsden B. G., Sekanina Z.: *Comets and Nongravitational Forces IV*. *AJ* 76(1971)1135.
- [15] Marsden B. G., et al.: *Comets and Nongravitational Forces V*. *AJ* 78(1973)211.
- [16] Marsden B. G.: *Comets*. *Annual Review in Astronomy and Astrophysics* 1974.
- [17] Marsden B. G.: *Nongravitational Forces on Comets*. In: *Dynamics of comets: Their origin and evolution*. (Eds. A.Carusi & G.B.Valsecchi). Reidel Publishing 1984.
- [18] Montenbruck O. & Pfleger T.: *Astronomie mit dem Personal Computer*. 2.Aufl., Springer-Verlag 1994.
- [19] Rahe J.: *Die Staubproduktion der Kometen*. *Sterne und Weltraum* 2(1977)47.

- [20] Rickman H. & Froeschlé C.: Model calculations of nongravitational forces on comet P/Halley. In: *Cometary Exploration III* (Ed. T.I. Gombosi). Central Research Institute for Physics, Hungarian Academy of Sciences 1982.
- [21] Rickman H. & Froeschlé C.: Model calculations of nongravitational forces on short-period comets II. High-obliquity case. *Astron. Astrophys.* 170(1986)161.
- [22] Schubart J. & Stumpff P.: On an n-body program of high-accuracy for the computation of ephemerides of minor planets and comets. *Veröffentlichungen des Astronomischen Rechen-Instituts Heidelberg Nr. 18*. Karlsruhe 1966.
- [23] Sekanina Z.: Effects of Discrete-Source Outgassing on Motions of Periodic Comets and Discontinuous Anomalies. *AJ* 105(1993)702.
- [24] Shampine F. S., Gordon M.K.: *Computer-Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen*. Vieweg 1984.
- [25] Sitarski G.: Correction of Cometary Orbits Including the Perturbations in Differential Coefficients. *Acta Astr.* 21(1971)87.
- [26] Sitarski G.: Recurrent Power Series Integration of Equations of Comet's Motion Including the Nongravitational Terms in Marsden's Form. *Acta Astr.* 34(1984)53.
- [27] Sitarski G.: Motion of Comet P/Metcalf-Brewington (1906 VI = 1991a). *Acta Astr.* 42(1992)49
- [28] Svoreň J.: Post-Perihelion Photometry of Comet Halley at the Skalnaté Pleso Observatory. Preprint submitted to *Bull. Astron. Inst. Czechosl.* 1989.
- [29] Yeomans D. K. & Chodas P.W.: An asymmetric outgassing model for cometary nongravitational forces. *AJ* 98(1989)1083.
- [30] Yeomans D. K.: A review of comets and nongravitational forces. In: *Asteroids, Comets, Meteors (ACM) 1993*. (Eds. A.Milani, M. di Martino, A.Cellino). IAU-Symposium No. 160.

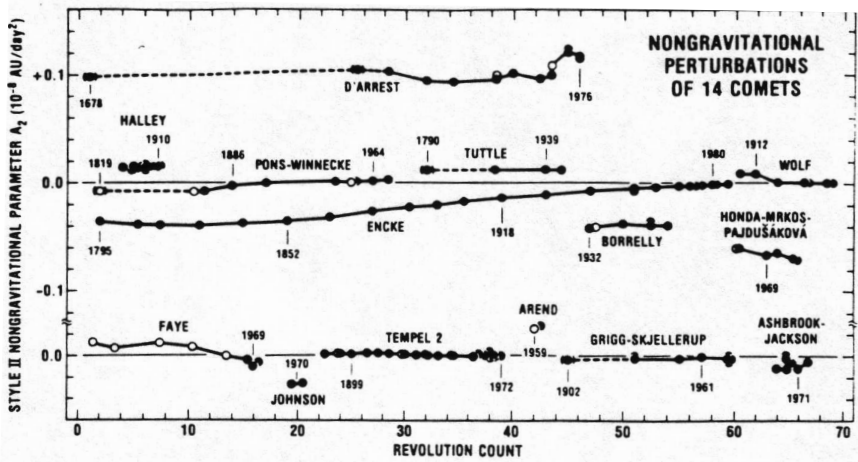


Figure 1. Fourteen Comets whose Nongravitational Effects are either Constant or Slowly Varying with Time. Figures 1 and 2 Courtesy of Z. Sekanina (1993a).

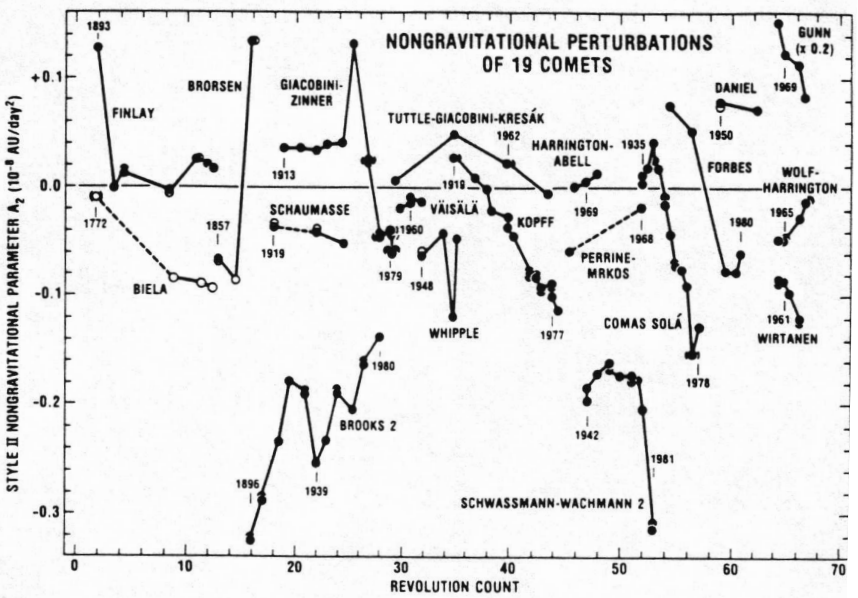
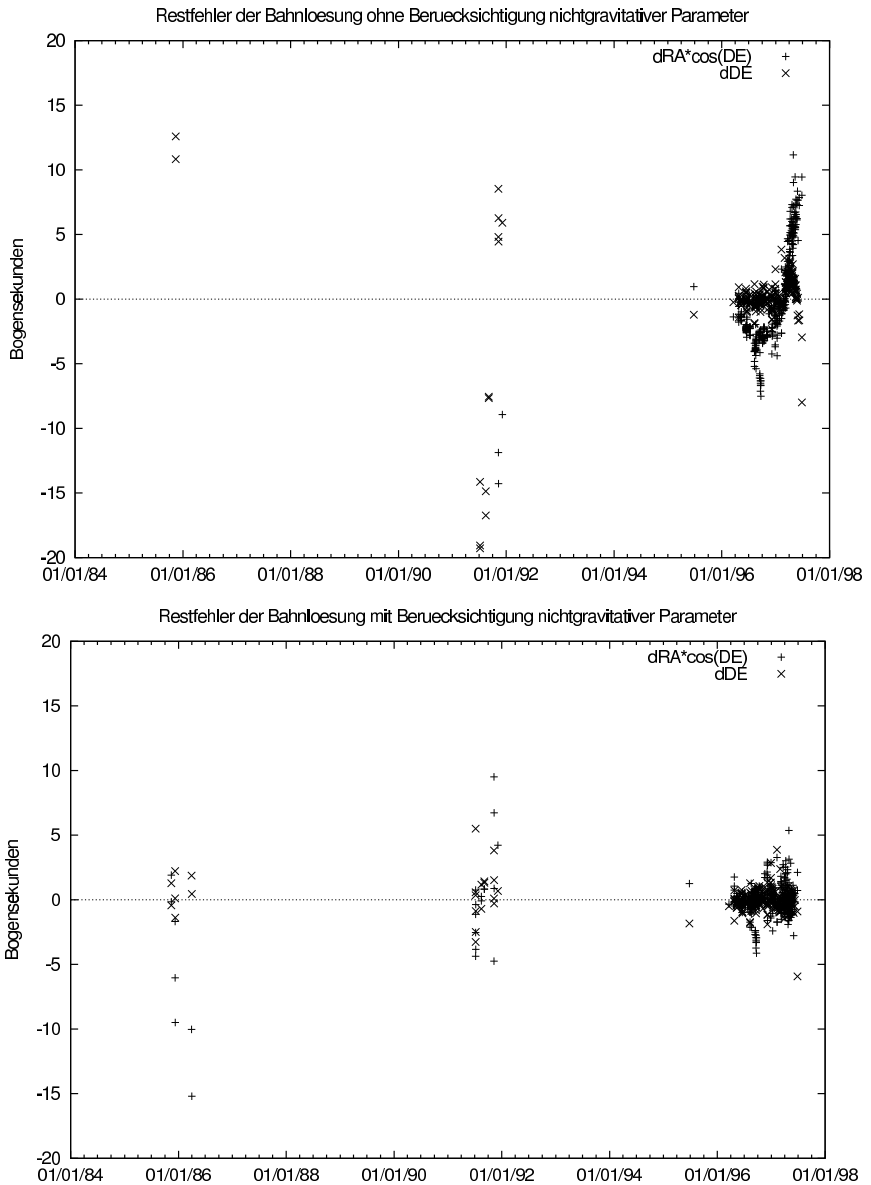


Figure 2. Nineteen Comets whose Nongravitational Effects are Strong Functions of Time.

Abb. 4 Die obere Graphik zeigt 14 Kometen, deren transversale Komponente  $A_2$  nicht oder nur langsam mit der Zeit variiert. In der unteren Graphik sind 19 Kometen dargestellt, deren transversale Komponente hingegen stark zeitabhängig ist. Aus Yeomans (1993).



**Abb. 5** Restfehler in  $\cos\delta\Delta\alpha$  und  $\Delta\delta$  für die Bahnlösung der Erscheinungen 1985–1997. In der oberen Graphik blieben nichtgravitative Kräfte unberücksichtigt. Die Restfehler der erhaltenen Bahn liegen über dem Datenrauschen, das betrifft insbesondere die 96/97er Erscheinung mit CCD-Beobachtungen, deren Genauigkeit üblicherweise in der Größenordnung 1 Bogensekunde liegt. In der 85/86er Erscheinung betragen die Abweichungen bis 3 Bogenminuten in RA (und liegen deshalb außerhalb des Plots) bzw. 1 Bogenminute in der 91er Erscheinung. Die untere Graphik gibt die Residuen für eine Bahnlösung unter Einbeziehung der beiden nichtgravitativen Parameter  $A_1, A_2$  wieder.